Ganzrationale Funktionen mit Parameter
Übung

1. Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion. Geben Sie deren Vielfachheit in Abhängigkeit vom Parameter an.

   a) $f_a(x) = ax^3 - 12ax^2 + 44ax - 48a;\ a \neq 0$

   b) $f_b(x) = x^3 - (3 + b)x^2 + (2 + 3b)x - 2b$ mit $b \in IR$ (Hinweis: $x_1 = 1$)

   c) $f_c(x) = cx^3 + 2c^2x^2 - x^2 + c^3x - 2cx - c^2;\ c \neq 0\ (x_1 = -c)$

2. Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen $f_k\colon x \mapsto f_k(x)$ durch den Term

$$f_k(x) = x^4 - 3kx^3 + k^2x^2 + 3k^3x - 2k^4,\ k \in \mathbb{R}^+, \text{ d.h. } k > 0.$$

   Definitionsmenge aller Funktionen ist $D_{f_k} = \mathbb{R}$.

   a) Zeigen Sie: f_k besitzt bei $x_1 = k$ eine zweifache Nullstelle. Geben Sie alle Nullstellen von f_k mit jeweiliger Vielfachheit an.

   b) Bestimmen Sie k so, dass der Graph G_{f_k} von f_k durch den Punkt $S(0; -2)$ verläuft.

   c) Sei nun $k = 1$. Geben Sie die ungefähre Lage des Graphen von f_1 im Koordinatensystem durch Felderabstreichen an!

3. Betrachten Sie nun die Funktionen g_t mit dem Term

$$g_t(x) = x^4 - t^2x^2 - 4x^2 + 4t^2,\ a \in IR,\ t > 0$$

   und Definitionsbereich $D_{g_t} = \mathbb{R}$.

   a) Überprüfen Sie G_{g_t} auf Symmetrie und geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.

   b) Ermitteln Sie alle Nullstellen von g_t und geben Sie die Vielfachheiten aller Nullstellen in Abhängigkeit von t an (Fallunterscheidung)!

   c) Setzen Sie $t = 1$ und berechnen Sie die Funktionswerte $g_1(0)$, $g_1(0{,}5)$, $g_1(1{,}5)$ sowie $g_1(2{,}25)$ auf zwei Nachkommastellen genau. Zeichnen Sie ohne weitere Rechnung den Graphen von g_1 in ein geeignetes Koordinatensystem im Bereich $-2{,}25 \leq x \leq 2{,}25$ ein.

Ganzrationale Funktionen mit Parameter
Lösung

1.

a) $f_a(x) = a(x-2)(x-4)(x-6)$

Unabhängig vom Parameter a ergeben sich die drei Nullstellen

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 & \text{einfach} \\ x_2 = 4 & \text{einfach} \\ x_1 = 6 & \text{einfach} \end{array}$$

Hinweis: Der Parameter $a \neq 0$ hat hier keinen Einfluss auf die Lage der Nullstellen, er bewirkt auf den Graphen lediglich eine Streckung/Stauchung in y-Richtung.

b) $f_b(x) = (x-1)(x-2)(x-b)$

1. Fall: $b = 1$	2. Fall: $b = 2$	2. Fall: $b \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$
$x_1 = 1$ doppelt	$x_1 = 1$ einfach	$x_1 = 1$ einfach
$x_2 = 2$ einfach	$x_2 = 2$ doppelt	$x_2 = 2$ einfach
		$x_3 = b$ einfach

c) $f_c(x) = c\left(x - \frac{1}{c}\right)(x+c)^2$

$$\begin{array}{ll} x_1 = \frac{1}{c} & \text{einfach} \\ x_2 = -c & \text{doppelt} \end{array}$$

Die beiden Nullstellen können nie übereinstimmen, damit ist keine Fallunterscheidung nötig.

2.

a) $f_k(x) = (x-k)^2(x^2 - kx - 2k^2) = (x-k)^2(x+k)(x-2k)$.

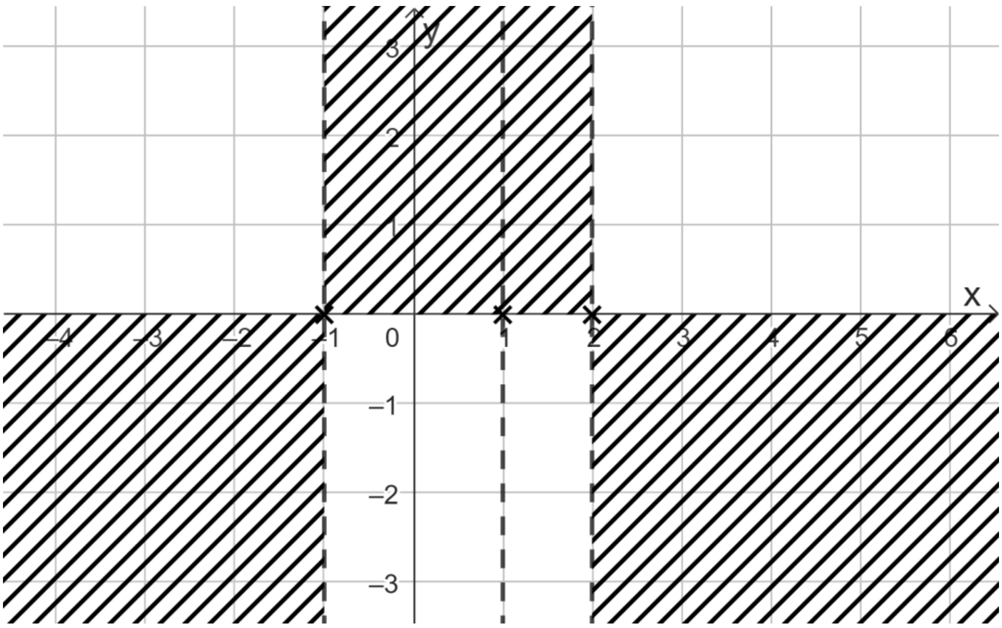
$$\begin{aligned} x_1 &= k && \text{doppelt} \\ x_2 &= -k && \text{einfach} \\ x_1 &= 2k && \text{einfach} \end{aligned}$$

Eine Fallunterscheidung ist wegen $k > 0$ nicht nötig.

b) $f_k(0) = -2 \Rightarrow k = 1$

c) $f_1(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2)$

Der Graph G_{f_1} kommt von oben und geht für große x-Werte wieder nach oben. Er schneidet die x-Achse an den einfachen Nullstellen $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$ und berührt die x-Achse von unten an der doppelten Nullstelle $x_1 = 1$.



3.

a) Es existieren ausschließlich gerade Hochzahlen in x
$\Rightarrow G_{g_a}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b)

$$x_{1/2} = \pm a$$
$$x_{3/4} = \pm 2$$

1. Fall: $a = 2$
$x_1 = -2$ doppelt
$x_2 = 2$ doppelt

2. Fall: $a \neq 2$
$x_1 = -a$ einfach
$x_2 = a$ einfach
$x_3 = -2$ einfach
$x_4 = 2$ einfach

c) $g_1(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$g_1(0) = 4$
$g_1(0{,}5) \approx 2{,}81$
$g_1(1{,}5) \approx -2{,}19$
$g_1(2{,}25) \approx 4{,}32$